

اثر زکات در توازن اجتماعی و ثروت جامعه با استفاده از مدل تصادفی

نویسندگان: محمد مهدی عسکری^۱، محمد هادی زاهدی وفا^۲، احمد محمدی پور^۳

تاریخ پذیرش نهایی: ۹۷/۱۱/۱۵

تاریخ دریافت: ۹۷/۹/۶

فصلنامه مطالعات راهبردی بسیج، سال بیست و یکم، شماره ۸۱، زمستان ۱۳۹۷

چکیده

این مقاله با اتخاذ نظریه امکان تعمیم اموال مشمول زکات، الگوی تصادفی زکات را ارائه می‌دهد که در آن درآمد و مصارف زکات و تغییرات ثروت افراد جامعه در یک دوره، همگی متغیر تصادفی هستند. برای این منظور ابتدا افراد جامعه به دودسته زکات دهنده و زکات گیرنده تقسیم شده و معادلات تصادفی ثروت هر گروه محاسبه می‌شود و پس از آن با تشکیل توابع مرتبط نقش زکات در فاصله‌ی طبقاتی و درآمد جامعه بررسی شده است. نتایج حاکی از آن است که اگر در جامعه زکاتی پرداخت نشود و باز توزیعی در جامعه صورت نگیرد، برای ایجاد توازن بین طبقات باید مجموع رشد ثروت دو گروه به سمت صفر میل کند و میانگین رشد ثروت ثروتمندان در دوره‌های متوالی منفی و میانگین رشد ثروت فقرا مثبت باشد. اما در صورت پرداخت زکات؛ اگر اختلاف ثروت بین زکات دهنده و زکات گیرنده کم باشد، با در نظر گرفتن برخی از فروض، زکات این پتانسیل را دارد که توازن ثروت بین طبقات جامعه برقرار کند، اما اگر اختلاف ثروت دو گروه خیلی زیاد باشد تحت فروض این الگو، بدون تغییر در رشد ثروت و با ساختار درآمدی دو گروه، زکات در ایجاد توازن خیلی اثر گذار نیست. علاوه بر این مشخص گردید که با توجه به مدل و فروض آن، پرداخت زکات اثری روی رشد اقتصادی ندارد.

همچنین مشخص شد که ثروت جامعه تحت فروض مدل مستقل از زکات است و مطابق مدل پرداخت زکات اثری روی رشد اقتصادی ندارد.

واژگان کلیدی: زکات، مدل تصادفی، توازن اجتماعی، ثروت، فرآیند وینر

۱. عضو هیئت علمی دانشگاه امام صادق علیه السلام (نویسنده مسئول). m.mahdi.askari@gmail.com.

۲. عضو هیئت علمی دانشگاه امام صادق علیه السلام.

۳. دانشجوی دکتری دانشگاه تهران. a.mohammadipour@ut.ac.ir.

۱- مقدمه و بیان مسئله

در قرآن کریم واژه زکات در ۳۲ آیه ذکر شده و در اکثر موارد واژه زکات در کنار نماز ذکر شده است. در تفسیر نمونه در بیان آیه ۱۱۰ سوره بقره چنین آمده است: «این آیه، به مؤمنان دو دستور مهم و سازنده می‌دهد؛ یکی در مورد نماز که رابطه محکمی بین انسان و خدا ایجاد می‌کند و دیگری زکات که رمز همبستگی‌های اجتماعی است و این هر دو برای پیروز شدن بر دشمن [در کنار یکدیگر] لازم است؛ زیرا با این دو مهم، روح و جسم مؤمنان نیرومند می‌شود.» (تفسیر نمونه، ج ۱، ص ۱۱۰) این پیوستگی زکات و نماز در روایات نیز اشاره شده است و دلیل محکمی بر اهمیت و جایگاه زکات در نظام اقتصادی اسلام دارد. به‌طور کلی می‌توان مطالعات انجام شده را در سه دسته تقسیم کرد؛ دسته اول مطالعاتی که به بررسی روایی و یا فقهی اموال مشمول زکات پرداخته و امکان گسترش آن را بررسی کرده است. دسته دوم به بررسی و تحلیل‌های آماری زکات و اثرات آن بر فقر و اقتصاد ایران پرداخته است و دسته سوم که بیشتر بر نهادسازی و مسائل عملیاتی زکات متمرکز شده است.

با بررسی مصارف زکات این نکته روشن می‌شود که عمده کاربرد زکات در جهت رفع فقر است. بر اساس آیات و روایات، خداوند متعال زکات را عمدتاً برای رفع فقر و تأمین حداقل‌های معیشتی خانوار نیازمند وضع کرده و ضرورت دارد بخش عظیمی از این درآمدها بین فقرا تقسیم شود (شعبانی، کاشیان، ۱۳۸۹، ص ۲) در روایات نیز اشاره شده است که اگر زکات پرداخت شود فقر نیز از بین می‌رود به‌علاوه بر اساس گزارش‌های تاریخی و روایات مطرح شد در دورانی از حکومت اسلامی در برخی مناطق با توجه به سطح مناسب زندگی مردم و نبود فقر، زکات‌های جمع‌آوری شده به مناطق دیگر انتقال داده شده است.

بررسی‌های تجربی نشان می‌دهد که درآمد بالقوه زکات علی‌الخصوص بر اساس فتوای انحصار اموال مشمول در موارد نه‌گانه بسیار کمتر از آن است که بخواهد برای رفع فقر کفایت کند. چراکه اولاً اموال مشمول در جوامع صنعتی امروز به‌گونه‌ای تغییر کرده که نصاب زکات آن‌ها کمتر شده است و ثانیاً حجم فقر موجود در جوامع امروزی با توجه مناسبات و روابط پیچیده و جدید جوامع افزایش یافته است. بنابراین یک تعارضی بین عدم توانایی کنونی زکات برای رفع فقر و حکمتی که برای وضع زکات در روایات به آن اشاره شده است، وجود دارد.

زکات یکی از مهم‌ترین مباحث نظام اقتصادی اسلام بوده که در مطالعات اقتصاد اسلامی نیز نسبت به سایر مباحث بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. به‌طور کلی می‌توان



مطالعات انجام شده را در سه دسته تقسیم کرد؛ دسته اول مطالعاتی که به بررسی روایی و یا فقهی اموال مشمول زکات پرداخته و امکان گسترش آن را بررسی کرده است. دسته دوم به بررسی و تحلیل های آماری زکات و اثرات آن بر فقر و اقتصاد ایران پرداخته است و دسته سوم که بیشتر بر نهادسازی و مسائل عملیاتی زکات متمرکز شده است.

با این وجود علی رغم اینکه مطالعات خوب و قابل توجهی در این حوزه انجام شده است اما هم چنان خلأ یک تبیین ریاضی از این مسئله احساس می شود. روش های ریاضی یک ابزار محکم و قابل فهمی برای مباحث اقتصاد اسلامی مهیا می کند. استفاده از روش ریاضی برای تجزیه و تحلیل مسائل اقتصادی، امکانی روش شناختی است که به طور ویژه در قرن نوزدهم مورد توجه قرار گرفت. دامنه بحث و نظرها درباره رابطه ریاضیات و علم اقتصاد و نقد و بررسی دقیق و موشکافانه این تعامل از جمله موضوعاتی است که تا به امروز نیز ادامه داشته و همواره محل نزاع روش شناختی مکاتب مختلف اقتصادی بوده است. (پور کاظمی، ۱۳۹۴، ص ۲)

این پژوهش نیز در مورد مسئله زکات و اثرات آن در فاصله طبقاتی و رشد اقتصادی کنکاش می کند و سعی دارد تا با یک روش کمی و استفاده از ریاضیات تصادفی یک مدل اولیه برای زکات ارائه کند و پس از آن نقش زکات را در توازن اجتماعی و رشد اقتصادی بررسی می کند.

بدین منظور، پس از ادبیات نظری و پیشینه پژوهش، با اتخاذ رأی فقهی امکان گسترش منابع زکات، جامعه به دودسته زکات دهنده و زکات گیرنده تقسیم شده و توابع ثروت هر کدام که به صورت تصادفی هستند، محاسبه می شود. در ادامه با در نظر گرفتن فروزی در جهت آسان تر شدن محاسبات مدل، مطابق با توابع ثروت، توابع فاصله طبقاتی و رشد ثروت ملی نیز تشکیل شده و اثرات زکات در حالت های مختلف مورد بررسی قرار می گیرد و در نهایت نیز نتیجه گیری پژوهش ارائه می شود.

۲- مبانی نظری و پیشینه پژوهشی موضوع

۲-۱- مبانی نظری زکات

تعریف زکات: زکات از واجبات مالی در دین اسلام است که بر اساس آن، مسلمانان باید مقدار معینی از ۹ قلم کالا برای مصرف در زندگی فقرا و سایر امور عمومی اجتماعی بپردازند. این ۹ کالا عبارت اند از نقدین (طلا و نقره)، انعام ثلاثه (گاو، گوسفند و شتر) و غلات اربعه (گندم، جو، کشمش و خرما). مقدار پرداختی و شرایط وجوب زکات هر یک از این کالاها متفاوت است و در فقه تعیین شده است. در بیان تعیین موارد مصرف زکات



اکثر مفسران با استناد به آیه ۶۰ سوره توبه منحصرأً ۸ مورد؛ فقرا، مساکین، متصدیان و مأموران زکات، افرادی که به وسیله کمک‌های مالی، تمایل بیشتری به اسلام پیدا می‌کنند، آزاد کردن برده‌ها، بدهکاران، افراد در راه مانده و هر امری که رضای خداوند در آن باشد را ذکر کرده‌اند.

زکات و رفع فقر: اسلام زکات را به‌عنوان مهم‌ترین راهکار در جهت مبارزه با فقر مطرح می‌کند. زکات از سوی گروه مسلمانان که به حدنصاب رسیده‌اند پرداخت می‌شود و حکومت مسئول برنامه‌ریزی و مدیریت برای جمع‌آوری و توزیع مناسب این اموال در موارد مصرف آن است. با بررسی مصارف زکات این نکته روشن می‌شود که عمده کاربرد زکات در جهت رفع فقر است. بر اساس آیات و روایات، خداوند متعال زکات را عمدتاً برای رفع فقر و تأمین حداقل‌های معیشتی خانوار نیازمند وضع کرده و ضرورت دارد بخش عظیمی از این درآمدها بین فقرا تقسیم شود (شعبانی و همکاران، ۱۳۸۹، ص ۴) در روایات نیز اشاره شده است که اگر زکات پرداخت شود فقر نیز از بین می‌رود به‌علاوه بر اساس گزارش‌های تاریخی و روایات مطرح شد در دورانی از حکومت اسلامی در برخی مناطق با توجه به سطح مناسب زندگی مردم و نبود فقر، زکات‌های جمع‌آوری شده به مناطق دیگر انتقال داده شده است.

مفسرین هم‌چنین مهم‌ترین و با اولویت‌ترین مورد مصرف زکات را فقرا و سپس مساکین دانسته‌اند، علامه طباطبایی در بیان تفسیر آیه ۶۰ سوره توبه چنین بیان می‌کند: از همه آن‌ها مستحق‌تر و سزاوارتر نخست فقراء و پس از آن مساکین و بعد از آن کارمندان بیت‌المال و هم‌چنین تا به آخر؛ و چون چهارتای دومی از نظر ترتیب احقیقت مرتبه‌اش بعد از چهارتای اولی است آن را بعد ذکر کرد. پس، معلوم می‌شود که هر یک از هشت مورد جایش همانجائی است که برایش تعیین شده و دارای رتبه‌ای است که داده شده است. (طباطبایی، ج ۹، ص ۴۱۹)

از روایات زکات چنین برداشت می‌شود که اگر به زکات به‌خوبی عمل شود فقر از جامعه اسلامی ریشه کن شده و یا به حداقل می‌رسد. همان‌گونه که امام صادق (علیه‌السلام) در حدیثی می‌فرماید: «ولو أنَّ النَّاسَ أَدْوَأُ زَكَةَ أَمْوَالِهِمْ مَا بَقِيَ مُسْلِمٌ فَقِيرٌ مُحْتَاجٌ وَلَا سَتْنِي بِمَا فَرَضَ اللَّهُ لَهُ». سپس می‌افزاید: «وإنَّ النَّاسَ مَا افْتَقَرُوا وَلَا احْتَا جُوا وَلَا جَاعُوا وَلَا عَرُوا إِلَّا بِذُنُوبِ الْأَغْنِيَاءِ». (شیخ صدوق، ج ۲، ص ۷) اگر مردم زکات اموال خود را همه بدهند مسلمانی فقیر و محتاج نمی‌ماند، و هر فقیری غنی می‌شود... و به تحقیق که هر کس که فقیر است و محتاج و گرسنه و برهنه است همه این‌ها به سبب گناهان اغنیاست که زکات مال خود را به این جماعت نداده‌اند و اگر می‌دادند ایشان محتاج نمی‌ماندند.



۲-۲-۲- مبانی نظری مدل سازی تصادفی

در این مقاله جهت انجام مدل سازی از مباحث فرآیند تصادفی وینر استاندارد، فرآیند و فرمول کلی ایتو، مشتق گیری تصادفی و معادله به لک شولز استفاده شده است. این مباحث به طور کامل در مطالعاتی مانند مک کین (۱۹۶۹)، گاردینر (۱۹۹۷)، بلقاسم (۲۰۰۱)، کالین (۲۰۱۲) بررسی شده است. به همین جهت در این مقاله مباحث به صورت گذرا مطرح شده و بیان جزییات بیشتر به مطالعات مذکور ارجاع داده می شود.

۲-۲-۱- فرآیند تصادفی وینر استاندارد

فرآیند تصادفی $\{w(t), t \geq 0\}$ را فرآیند تصادفی وینر گویند اگر:

$$w(0) = 0 \quad (1)$$

$$(2) \quad \text{فرآیند } \{w(t), t \geq 0\} \text{ دارای رشد مستقل و باثبات باشد،}$$

به این معنا که اگر $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ آنگاه $W_{t_1} - W_{s_1}$ و $W_{t_2} - W_{s_2}$ متغیر تصادفی مستقل باشند.

(۲) برای هر $t > 0$ $w(t)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس t باشد. در فرآیند وینر این ویژگی وجود دارد که هر چقدر هم مقدار Δt کوچک باشد همچنان خواص فرآیند حفظ می شود. می توان نشان داد که برای حالت حدی Δt به سمت dt و Δw به dw تمایل دارد. برای اکثر تحلیل های کاربردی و توصیف های آماری تنها دو لحظه اول هستند که نقش مهمی را ایفا می کنند. برای این مرتبه دوم و بالاتر می توانیم چنین بنویسیم:

$$(5) \quad E(dw) = 0, (dw)^2 = dt + O[(dt)^2], \quad dw dt = O[(dt)^n], \quad n > 2$$

۲-۲-۲- فرآیند ایتو (Ito)

فرآیند تصادفی $\{dx(t), t > 0\}$ یک فرآیند ایتو است اگر برای متغیر تصادفی x داشته باشیم:

$$(6) \quad dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw$$

که $\mu(x, t)$ تغییر مورد انتظار x در زمان t و $\sigma(x, t)dw$ جز تصادفی تغییرات در مقدار x است. x به عنوان مثال می تواند قیمت یک سهام و یا مقدار ثروت یک فرد در طول زمان باشد.

فرمول ایتو: در این بخش از به صورت خلاصه به فرمول ایتو و نحوه ی دستیابی به آن اشاره شده و سپس با استفاده از فرمول ایتو برخی قوانین محاسباتی مشتق گیری



تصادفی را مطرح شده است. این محتوا به صورت تفصیلی در مطالعاتی هم چون مک کین (۱۹۶۹)، گاردینر (۱۹۹۷) بررسی شده است.

ایتو با استفاده از بسط تیلور راه حلی برای حل معادلات دیفرانسیل ارائه کرد، فرض کنید $x(t)$ یک فرآیند تصادفی ایتو بوده و تابع $F(x,t)$ پیوسته نسبت به زمان و دو بار مشتق پذیر نسبت به x باشد. در این حالت برای دیفرانسیل کلی تابع F خواهیم داشت:

$$(۷) \quad dF(t) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2(x,t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dt = F_x dx + [F_t + \frac{\sigma^2(x,t)}{2} F_{xx}] dt$$

با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + O[(\Delta t)^2]$$

با جایگذاری و گرفتن حد داریم:

$$(۸) \quad dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dt$$

قوانین مشتق گیری تصادفی: فرض کنید که $x(t)$ یک فرآیند تصادفی ایتو بوده و دو تابع $F(x,t)$ و $G(x,t)$ پیوسته و مشتق پذیر نسبت به τ و دو بار مشتق پذیر نسبت به $x(t)$ باشد، بنابراین:

$$(۹) \quad d(F + G) = dF + dG \quad \text{قاعده جمع:}$$

$$(۱۰) \quad d(FG) = FdG + GdF + \sigma^2 dt \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} \quad \text{قاعده ضرب:}$$

$$(۱۱) \quad d\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{GdF - FdG}{G^2} - \frac{\sigma^2}{G^3} \frac{\partial G}{\partial x} \left(G \frac{\partial F}{\partial x} - F \frac{\partial G}{\partial x}\right) dt \quad \text{قاعده تقسیم:}$$

فرمول کلی تر ایتو: فرض کنید ρ همبستگی بین دو فرآیند تصادفی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ بوده و $F(x_1, x_2, t)$ پیوسته و مشتق پذیر نسبت به τ و پیوسته و دو بار مشتق پذیر نسبت به x_1 و x_2 باشد. دیفرانسیل کلی تابع Φ به صورت زیر خواهد بود:

$$(۱۲) \quad dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} [\sigma_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \sigma_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + 2\rho\sigma_1\sigma_2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}] dt$$



اگر $F(x_1, t)$ و $G(x_2, t)$ پیوسته و مشتق پذیر نسبت به t و پیوسته و دو بار مشتق پذیر نسبت به x_1 و x_2 بوده و به علاوه $X_1(t)$ و $X_2(t)$ فرآیند تصادفی ایتو باشند. با توجه به معادله (۱۲) برای قواعد مشتق گیری تصادفی در مقادیر $i=1,2$ خواهیم داشت:

$$d(F + G) = dF + dG \quad \text{قاعده جمع: (۱۳)}$$

$$d(FG) = FdG + GdF + \rho\sigma_1\sigma_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_2} \quad \text{قاعده ضرب: (۱۴)}$$

$$d\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{(GdF - FdG)}{G^2} - \frac{\partial G}{\partial x^2} \rho\sigma_1\sigma_2 G \frac{\partial F}{\partial x_1} - \sigma_2^2 F \frac{\partial G}{\partial x_2} \frac{dt}{G^3} \quad \text{قاعده تقسیم: (۱۵)}$$

طبیعی است که اگر $X_1 = X_2$ باشد قواعد فوق برای یک متغیر یعنی روابط (۹) و (۱۰) برقرار است.

۲-۲-۳- معادله به لک-شولز

فرآیند ایتو دلالت های مختلفی می تواند داشته باشد که یکی از این دلالت ها معادله به لک شولز است که غالباً در تعیین قیمت دارایی های پر مخاطره و قیمت اختیارات مورد استفاده قرار می گیرد که در آن قیمت سهام با یک فرآیند وینر استاندارد به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

این معادله ویژگی ها و روش محاسبه خاصی دارد که جهت مطالعه بیشتر می توان به منابعی هم چون گاردینر (۱۹۸۶)، کالین (۲۰۱۲) اشاره کرد. در این مقاله با استفاده از این معادله برای محاسبه ثروت دو گروه زکات دهنده و زکات گیرنده استفاده شده است.

۲-۳-۳- پیشینه تحقیق

۲-۳-۱- مطالعات نظری زکات و بررسی اموال مشمول زکات

دسته اول: مطالعات نظری زکات و بررسی اموال مشمول زکات		
نویسندگان (سال-روش)	مسئله اصلی	نتایج
عسکری (۱۳۸۵) - بررسی آیات و روایات حدیثی	مفهوم زکات در آیات و روایات چیست؟	منابع زکات محدود به مواردی که گانه نیست و همه اموال را شامل می شود، مگر آن که دلیل خاصی برای تخصیص داشته باشیم، اما حاکم حق می تواند در زمان های مختلف گروهی از اموال را مورد عفو قرار دهد.



دسته اول: مطالعات نظری زکات و بررسی اموال مشمول زکات		
نویسندگان (سال) - روش	مسئله اصلی	نتایج
عسکری، پوردره (۱۳۸۷) - بررسی آیات و روایات	الگوی مناسب مؤسسات مالی زکات در جمهوری اسلامی ایران چیست؟	دیدگاه تعیین متعلقات زکات به دست حاکم در هر زمان، که به صورت یک احتمال از سوی گروهی از فقیهان روزگار ما ابراز شده است، دیدگاه مناسبی به نظر می‌رسد.
ایروانی (۱۳۸۸) - با استفاده از قرینه‌های متصل و منفصل و گردآوری خانواده حدیث و نیز توجه به سیر تاریخ صدور احادیث به این بحث پرداخته شده و از کاربردهای قرآنی این لغات نیز به عنوان قرینه استفاده شده است.	زکات و صدقه در روایات به چه معنا به کار رفته است؟	با توجه به کاربرد لغات در آیات و روایات، زکات حقیقت شرعی در خصوص زکات فقهی، قابل اثبات نیست، بلکه صرفاً حقیقت متشرعه وجود دارد
توسلی (۱۳۹۴) - روش اجتهادی و بر اساس مبانی فقهی و موضوع شناسی تحلیلی ماهیت پول	آیا به لحاظ فقهی امکان اخذ زکات پول‌های رایج وجود دارد؟	با توجه به ماهیت اعتباری پول و استفاده از قضیه استصحاب ما در وجوب زکات ریال طلای فیزیکی یقین داریم و در زکات ریال طلای اعتباری شک و با استفاده از استصحاب می‌توان زکات را تسری داد.
ثامنی کیوانی (۱۳۷۷) - با استفاده آمار سالانه تولیدات کشاورزی	ظرفیت بالقوه زکات در اقتصاد ایران چقدر است؟	با محاسبه درآمدهای بالقوه حاصل از زکات (با فرض انحصار در موارد نه‌گانه) به این نتیجه رسیده است که زکات تنها ۱,۶ درصد از مخارج دولت را تأمین می‌کند و نمی‌تواند منبع مناسبی برای درآمدهای دولت باشد.
کیاء الحسینی (۱۳۸۲) - برآورد مقدار زکات کل کشور و کمبود غذایی فقرای کشور بر اساس اختلاف خط فقر خوراکی و هزینه خوراکی سرانه	نقش زکات در رفع نیازهای جامعه چیست؟	وی برای مقایسه بین مقدار زکات کل کشور و فقر غذایی جامعه، مقادیر زکات کل کشور را در حالت‌های مختلف برآورد کرد و نشان داد مقادیر زکات کل کشور کمتر از میزان برآورد فقر غذایی کشور است
دسته دوم: تحلیل‌های آماری زکات و اثرات آن بر فقر و اقتصاد ایران		
زمانی فر (۱۳۸۲) - دوروش کتابخانه‌ای و آماری	ارزیابی توان فقرزدایی زکات در برخی از استان‌های منتخب	با محاسبه و مقایسه درآمدهای حاصل از زکات بالقوه به این نتیجه می‌رسد که درآمد به‌تنهایی برای رفع فقر استان‌های منتخب کفایت نمی‌کند. از این رو، استفاده از درآمدهای دیگری از جمله مالیات ضروری است.



دسته دوم: تحلیل‌های آماری زکات و اثرات آن بر فقر و اقتصاد ایران		
نویسندگان (سال) - روش	مسئله اصلی	نتایج
عسکری و کاشیان (۱۳۸۹)، محاسبه ظرفیت بالقوه خمس و زکات با استفاده از داده‌های اقتصاد ایران	خمس چه اثری بر تأمین حداقل معیشت خانوارهای نیازمند در ایران دارد؟	با فرض انحصار زکات در موارد نه‌گانه به محاسبه ظرفیت بالقوه زکات، زکات فطره و خمس در اقتصاد ایران پرداخته و پس از تبیین حداقل معیشت از نظر اسلام، به این نتیجه می‌رسد که این منابع کفایت می‌کند.
عاقلی (۱۳۹۱)، محاسبه ظرفیت زکات در استان‌های منتخب بر اساس آمارنامه کشاورزی	میزان مالیات‌های اسلامی در اقتصاد ایران چقدر است؟	به محاسبه ظرفیت بالقوه زکات پرداخته و بیان می‌کند با توجه به خشک‌سالی‌ها و تغییرات اقلیمی لذا زکات در مناطق مختلف در یک دوره مشخص و نیز در طول زمان متغیر خواهد بود
شعبانی و کاشیان (۱۳۹۲)، با روش آماری به محاسبه اثرات توزیعی زکات و خمس در اقشار فقیر جامعه بر اساس رویکرد خط فقر اسلامی پرداخته و تغییرات ضریب جینی ناشی از باز توزیع	زکات چه اثری بر ضریب جینی دارد؟	ظرفیت بالقوه زکات اقلام ۹ گانه توانایی کفاف فقر را نمی‌کند و برای این مهم خمس و زکات را باهم در نظر گرفتند و محاسبه نشان می‌دهد که این اثرگذار است و باز توزیع آن موجب کاهش ضریب جینی می‌شود.
کیاء الحسینی (۱۳۹۰)، بر اساس نظرسنجی از نخبگان این حوزه	اجرای مالیات اسلامی نیازمند چه ملاحظات است؟	او ۱۸ مورد از این ملاحظات را احصاء نموده و با نظرسنجی از نخبگان به تبه‌بندی آن‌ها پرداخته است. نخبگان اعتقاد دارند که مهم‌ترین مسئله استقلال حوزه‌های علمیه و کم‌اهمیت‌ترین موضوع اختلافات فقهی است.
منذر قحف (۱۹۹۸)، روش کتابخانه‌ای	نقش زکات بر بودجه دولت چیست؟	درآمد زکات می‌تواند در بودجه دولت جایگزین شود و از این طریق بودجه‌ای را برای سایر مخارج اجتماعی آزاد کند. و از طریق غیرمستقیم می‌تواند بر روی مصرف کل، سرمایه‌گذاری، اشتغال مورد توجه قرار بگیرد.
دسته سوم: مسائل عملیاتی زکات و تجارب کشورهای اسلامی		
کبیر حسن (۲۰۱۰)، بررسی مفهوم فقر به دسته‌بندی آن	زکات چه نقشی را می‌تواند در تأمین مالی خرد ایفاء کند؟	نویسنده با اشاره به تأمین مالی خرد متعارف نقاط ضعف آن را مانند نرخ بهره بالا، انحراف اعتبارات، و عدم انطباق با اسلام بیان می‌کند و پس از آن چارچوب و فرآیند مدل اجماع شده خود از زکات و اوقاف را بیان می‌کند.



دسته سوم: مسائل عملیاتی زکات و تجارب کشورهای اسلامی		
نویسندگان (سال) - روش	مسئله اصلی	نتایج
فاروق عزیز (۲۰۱۳)، روش کتابخانه‌ای	زکات چه نقشی می‌تواند در الگوی مالیات ستانی ایفا کند؟	زکات به‌عنوان یک سیستم زمانی اجرایی می‌شود که یک حکومت اسلامی تشکیل شود. و بیان می‌کند که نرخ و موارد زکات در قرآن نیامده است پس می‌توان به رفتار تاریخی مسلمانان اولیه مراجعه کرد.
اسلام رفیق (۲۰۱۶)، روش کتابخانه‌ای و آماری	چه مدلی برای احبای زکات در بنگلادش می‌تواند اجرا شود؟	با بررسی بنگلادش یک مدل اجرایی بر اساس مسجد جامع برای مدیریت و بهبود وضعیت زکات ارائه می‌کند

۲-۳-۲- جنبه‌های نوآوری مقاله

استفاده از روش ریاضی برای تجزیه و تحلیل مسائل اقتصادی، امکانی روش‌شناختی است که به‌طور ویژه در قرن نوزدهم مورد توجه قرار گرفت. دامنه بحث و نظرها درباره رابطه ریاضیات و علم اقتصاد و نقد و بررسی دقیق و موشکافانه این تعامل از جمله موضوعاتی است که تا به امروز نیز ادامه داشته و همواره محل نزاع روش‌شناختی مکاتب مختلف اقتصادی بوده است. (پورکاظمی، ۱۳۹۴، ص ۴)

اقتصاد اسلامی نیز باید نسبت به روش‌شناسی‌های خود صریح عمل کند و دیدگاه خود را نسبت به روش‌شناسی‌های کمی و کیفی روشن سازد. طبیعی است که استفاده از روش‌های کمی در نظریه‌پردازی ممکن است آن‌چنان مورد فایده قرار نگیرد اما ریاضیات می‌تواند اولاً یک قدرت تبیین و تحلیل مناسب برای نظریه‌های اقتصاد اسلامی ایجاد کند و ثانیاً در تبدیل نظریه‌های اقتصاد اسلامی به سیاست و عملیاتی شدن آن نقش به‌سزایی ایفا کند.

این پژوهش نیز در مورد مسئله زکات و نقش آن در رفع فقر - که سال‌های متمادی است در مطالعات اقتصاد اسلامی مورد توجه قرار گرفته است - کنکاش می‌کند و سعی دارد تا با یک روش کمی نیز به این مسئله بپردازد.

به‌طور خلاصه در مورد نوآوری‌های این مقاله نسبت به مطالعه‌های قبلی، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. ارائه یک مدل بر اساس ریاضیات تصادفی برای زکات
۲. بررسی پویای زکات در طول زمان
۳. در نظر گرفتن اثر متقابل درآمدهای افراد پرداخت‌کننده و گیرنده زکات در محاسبه نقش زکات در کاهش فقر



۴. بررسی نقش زکات در ایجاد توازن اقتصادی با استفاده از مدل تصادفی
 ۵. بررسی نقش زکات در رشد اقتصادی با استفاده از مدل تصادفی

۳- مدل تصادفی زکات و فروض آن

نسبت به امکان گسترش منابع زکات و یا انحصار آن در موارد نه گانه نظرات مختلفی وجود دارد که به صورت مختصر اشاره شد. در این قسمت از مقاله با انتخاب نظریه امکان تعمیم منابع مشمول زکات و حتی اخذ زکات از پول رایج کنونی و با استفاده از ریاضیات تصادفی یک تبیین ریاضی از این مسئله تحت عنوان مدل تصادفی زکات مطرح می‌شود. انتخاب این نظریه امکان تعمیم موارد زکات به این دلیل است که مدل سازی و بررسی دلالت‌های آن را آسان تر می‌کند در این موضوع مقالات مختلفی نگارش شده است که از مهم ترین آن‌ها می‌توان به عسکری (۱۳۸۵) عسکری و پوردره (۱۳۸۸)، ایروانی (۱۳۸۸)، توسلی (۱۳۹۴) و قحف (۱۹۹۸) اشاره کرد.

در این قسمت با استفاده از مدل ارائه شده توسط بالقاسم (۲۰۱۰) ابتدا توابع ثروت دو گروه زکات دهنده و زکات گیرنده را محاسبه کرده و پس از آن به بررسی اثرات زکات پرداخته می‌شود. زکات یک پرداخت واجب مالی برای افرادی است که ثروت آن‌ها $R(t)$ برای زمان t در یک دوره زمانی $I=[0, T]$, T برابر یک سال است، به یک میزان معین که نصاب (Z_0) نامیده می‌شود، رسیده باشد. با رسیدن ثروت به نصاب آن، فرد باید مقداری از آن را که ما ضریب زکات می‌نامیم و با حرف λ نشان می‌دهیم، به عنوان زکات پرداخت کند. در فقه شیعه این ضریب زکات برای موارد مختلف متفاوت است اما بازهم برای ساده سازی مقدار آن را به صورت متوسط برابر $1/40$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که ثروت هر فرد متشکل از دو جز است: (۱) جز قطعی (۲) جز تصادفی که دربرگیرنده هر تغییری غیر قابل منتظره در ثروت وی است. با مشخص شدن مقادیر میانگین تغییر ثروت افراد یا به بیانی تغییر قابل انتظار، $a(R, t)$ و انحراف معیار آن، $\sigma_1(R, t)$ می‌توانیم معادله دیفرانسیل تصادفی تغییرات ثروت زکات دهنده را به صورت زیر بنویسیم:

$$(۱۶) \quad dR(t) = a(R, t)dt + \sigma_1(R, t)R(t)dw_1(t), \quad R(t) \geq Z_0, 0 \leq t \leq T$$

و با در نظر گرفتن ضریب متوسط ۲,۵ درصد برای پرداخت، مقدار زکات پرداخت شده برابر است با:

$$(۱۷) \quad \lambda R(T) = R(T)/40$$

معادله (۱۶)، معادله دیفرانسیل تصادفی ثروت زکات دهندگان است. به صورت



مشابه می‌توانیم این معادله را برای گروه دوم یا همان زکات گیرندگان بازنویسی کنیم. بنابراین، فرض می‌کنیم افرادی که ثروت آن‌ها کمتر از نصاب پرداخت زکات است $(P(t) < Z_0)$ ، زکاتی پرداخت نکرده و شایسته دریافت زکات برای امرارمعاش خود هستند. این افراد به مانند طبقه دیگر صورتشان یک جز تصادفی دارد که به واسطه اتفاق‌های مختلف می‌تواند مثبت و یا منفی باشد و یک جز قطعی، بنابراین برای معادله ثروت تصادفی زکات گیرندگان داریم:

$$(۱۸) \quad dP(t) = b(P, t)dt + \sigma_2(P, t)P(t)dw_2(t), \quad P(t) < Z_0$$

دو معادله (۱۶) و (۱۷) یک مدل کلی برای ثروت دو گروه موردنظر جامعه است که تبیین و تحلیل ریاضی زکات را ممکن می‌سازد قبل از انجام محاسبات فرض‌های زیر را برای ساده‌سازی مدل در نظر می‌گیریم.

با توجه به اینکه سطح ثروت طبقه زکات گیرنده پایین است و عمدتاً تغییرات کمی حول میانگین خود می‌کند می‌توان مقادیر تصادفی آن را ناچیز دانست به همین خاطر فرض می‌شود که واریانس تغییرات ثروت زکات گیرندگان نزدیک به صفر است هرچند که تغییرات نهایی در ثروت فقرا اهمیت و ضرورت بیشتری دارد اما این تغییرات در مقایسه با حجم ثروت جامعه ناچیز و به صورت متوسط نزدیک به صفر است. بنابراین تغییرات ثروت زکات گیرندگان فقط ناشی از تغییر قسمت قطعی و قابل پیش‌بینی آن‌ها است و ثروت زکات دهندگان را نیز در حالتی بررسی می‌شود که واریانس آن ثابت است که البته با توجه به اینکه اقتصادها در بلندمدت یک سیر صعودی و رو به رشد دارند این مقدار به احتمال زیاد مثبت خواهد بود. علاوه بر این میانگین ثروت دو گروه را در طول زمان ثابت فرض شده است. بنابراین فروش مطرح‌شده را به زبان ریاضی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 0, \text{ و } a(R, t) = aR \text{ و } b(P, t) = bP \text{ که مقادیر } a, \sigma \text{ و } b \text{ ثابت هستند.}$$

از طرف دیگر پس از پرداخت زکات مقداری از صورت زکات دهندگان کاسته شده و به زکات گیرندگان پرداخت می‌شود، با این فروض معادلات تغییرات ثروت بعد از پرداخت زکات به صورت زیر خواهد بود:

$$(۱۹) \quad dR(t) = (1 - \lambda)[aR(t)dt + \sigma R(t)dw_1(t)] \quad R(t) \geq Z_0, 0 \leq t \leq T$$

$$(۲۰) \quad dP(t) = bP(t)dt + (\lambda)[aR(t)dt + \sigma R(t)dw_1(t)], P(t) < Z_0, 0 \leq t \leq T$$



۴-تصریح مدل

۴-۱-محاسبه توابع ثروت

با استفاده از محاسبات انتگرال گیری تصادفی محاسبات را انجام داده برای توابع ثروت دوطبقه جامعه معادلات زیر به دست خواهد آمد:

$$(۲۱) \quad R(t) = R_0 e^{(1-\lambda)(at + \sigma \int_0^t dw(t))}$$

$$(۲۲) \quad P(t) = P_0 e^{bt + \lambda a \int_0^t \frac{R(t)}{P(t)} dt + \lambda \sigma \int_0^t R(t)/P(t) dw(t)}$$

در ادامه پس از بررسی توابع ثروت دو گروه، برای تحلیل نقش زکات و مقایسه بین ثروت دو گروه زکات دهنده و زکات گیرنده به صورت پویا معادلات زیر را تشکیل داده و نقش زکات در هر کدام تحلیل خواهد شد.

$$(۲۳) \quad F(R, P, t) = F(R, P) = R(t) - P(t)$$

$$(۲۴) \quad G(R, P, t) = G(R, P) = R(t)/P(t)$$

$$(۲۵) \quad N(R, P, t) = F(R, P) = R(t) + P(t)$$

تابع F که از تفریق ثروت دو گروه به دست می آید و تابع G حاصل تقسیم ثروت دوطبقه خواهد بود. طبیعی است که هر چقدر تابع $F(R, P, t)$ به سمت \cdot و تابع $G(R, P, t)$ به سمت 1 میل کند به این معناست که اختلاف طبقاتی کمتری در جامعه برقرار است چرا وقتی حاصل کسر برابر یک می شود که صورت و مخرج آن باهم برابر باشند. در تابع $N(R, P, t)$ نیز که از جمع ثروت دو گروه به دست می آید هر به که این مقدار بزرگ تر باشد رشد ثروت جامعه بیشتر خواهد بود.

۴-۲-حل و دلالت های مدل

۴-۲-۱-دلالت های توابع ثروت

توابع ثروت دو گروه زکات دهنده و زکات گیرنده در معادلات (۲۱) و (۲۲) محاسبه شد. انتظار داریم که مقدار $a > b$ باشد. چرا که متوسط سطح درآمدی ثروتمندان جامعه از طبقه ضعیف جامعه بزرگ تر است فلذا انتظار می رود که متوسط رشد ثروت طبقه



زکات‌دهنده بزرگ‌تر از طبقه زکات‌گیرنده باشد.

بنابراین:

• اگر $\lambda=0$ یا $\sigma=0$ باشد، داریم:

$$P(t) = P_0 e^{bt} < Z_0 \rightarrow \frac{\ln(Z_0) - \ln(P_0)}{T} > b$$

$$x(t) = R(t) = R_0 e^{at} > Z_0 \rightarrow \frac{\ln(R_0) - \ln(Z_0)}{T} < a$$

از دو معادله فوق نتیجه می‌شود:

$$(۲۶) \quad b < \ln [(Z_0/P_0)^{1/T}] < \ln [(R_0/Z_0)^{1/T}] < a$$

• اگر $\lambda=1$ یا $\sigma=1$ باشد، داریم:

$$P(t) = P_0 e^{bt+m} < Z_0 \rightarrow \frac{\ln(Z_0) - \ln(P_0)}{T} > b + m/T$$

که مقدار m برابر است با:

$$m = \lambda a \int_0^t \frac{R(t)}{P(t)} dt + \lambda \sigma \int_0^t R(t)/P(t) dw(t)$$

$$R(t) = R_0 > Z_0 \rightarrow \ln(X_0) - \ln(Z_0) > 0$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$(۲۷) \quad 0 < \ln \left[\left(\frac{R_0}{Z_0} \right) \right] \leq b < \ln [(Z_0/P_0)^{1/T}] - m/T \leq a$$

بنابراین تا به اینجا با استفاده از معادلات ثروت زکات‌دهنده و زکات‌گیرنده

(معادلات ۲۱ و ۲۲) و دو معادله (۲۶) و (۲۷) برداشت می‌شود که:

فقرا (یا همان زکات‌گیرندگان) بدون دریافت زکات و تنها با درآمد خودشان، به

سطح ثروتمندان (یا همان زکات‌دهندگان) نمی‌رسند.



-ثروت زکات گیرندگان با ضریب زکات (λ) ، نوسان درآمدی ثروتمندان (σ) و اختلاف درآمدی دوطبقه نسبت به هم $(R(t)/P(t))$ رابطه مستقیم دارد و با افزایش هر کدام، ثروت آن‌ها هم افزایش می‌یابد.

-هرچقدر مقدار $(R(t)/P(t))$ بزرگ‌تر باشد، پرداخت زکات مهم‌تر و مؤثرتر است.

- تغییرات قابل انتظار ثروت زکات گیرندگان (b) با مقدار m رابطه معکوس دارد. یعنی هرچقدر مقدار m بزرگ‌تر باشد، b کمتر خواهد بود.

۴-۲-۲- نقش زکات در فاصله طبقاتی

فرض کردیم که جامعه مورد مطالعه دارای دوطبقه فقیر و ثروتمند است که به دنبال آن به دو گروه زکات‌دهنده و زکات‌گیرنده تقسیم شدند. در این فرض، حالت ایدئال آن است که فقرا نیز به سطح زکات دهندگان برسند. به همین منظور دو تابع $F(R, P, t)$ و $G(R, P, t)$ به صورت زیر تعریف شدند:

$$(۲۸) \quad F(R, P, t) = F(R, P) = R(t) - P(t)$$

$$(۲۹) \quad G(R, P, t) = G(R, P) = R(t)/P(t)$$

حالت مطلوب وضعیتی است که اختلاف ثروت قابل توجهی وجود نداشته و همه افراد جامعه جز زکات‌دهنده باشد، که در آن صورت تابع F به سمت صفر و تابع G به سمت ۱ میل می‌کند. در این بخش از مقاله به این مسئله پرداخته می‌شود که تحت چه شرایطی این توازن اقتصادی اتفاق خواهد افتاد.

فرض می‌شود که بین دو فرآیند وینر W_1 و W_2 همبستگی وجود داشته و روابط زیر برقرار است:

$$(۳۰) \quad dw_1 dw_2 = \rho dt \quad \text{و} \quad (dw_i(t))^2 = dt, i = 1, 2$$

۴-۲-۳- بررسی تابع F

ابتدا با توجه به فرمول ایتو dF و معادله‌های شماره (۱۵)، (۲۱) و (۲۲) داریم:

$$(۳۱) \quad \begin{aligned} \partial F / \partial R &= 1, \partial F / \partial P = -1 \\ \partial F / \partial t &= \partial^2 F / \partial^2 R = \partial^2 F / \partial^2 P = \partial^2 F / \partial R \partial P = 0 \\ dF &= dR - dP \end{aligned}$$

$$(۳۲) = [(1 - 2\lambda)aR(t) - bP(t)]dt + (1 - 2\lambda) \sigma R(t)dw_1(t)$$



می‌دانیم: $(dw_i(t))^2 = dt$

و فرض می‌کنیم: $w_i \simeq \sqrt{t} \rightarrow dw_i = dt/2\sqrt{t}$

همان‌طور گفته شد T دوره پرداخت زکات است که اگر به سمت بی‌نهایت میل کند، زکات بی‌اثر می‌شود و هرچقدر به سمت صفر میل کند اثر زکات بزرگ‌تر خواهد شد. در حکم زکات این مقدار برابر ۱ سال در نظر گرفته است. در مورد σ هم می‌دانیم که اثری مانند T اما متضاد و مقابل دارد. بنابراین فرض می‌شود که:

$$(۳۳) \quad \sigma \simeq 2\sqrt{T}$$

با این فرض اثر T و σ همدیگر را خنثی کرده و نادیده گرفته می‌شوند، با جایگذاری در (۳۲) داریم:

$$(۳۴) \quad [dF/dt]_{t=T} \simeq (1 - 2\lambda)[(a + 1)R(T)] - bP(T)$$

تابع F باید به صورت نزولی باشد بنابراین جهت بررسی نزولی بودن و پیدا کردن نقاط بحرانی باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$(۳۵) \quad [dF/dt]_{t=T} \leq 0$$

برای این موقعیت دو حالت قابل تصور است. یکی حالتی که فاصله دوطبقه جامعه از یکدیگر کم باشد یعنی $P(T) \lesssim R(T)$ ، $(F(T) \gtrsim 0)$ که در این صورت $R(T) \gtrsim z_0 \gtrsim P(T)$ و حالتی که اختلاف ثروت دوطبقه از یکدیگر خیلی زیاد باشد، $R(T) \gg P(T)$ که در این صورت می‌توانیم چنین فرض کنیم که:

$$(F(T) \simeq R(T))$$

• حالت اول: $P(T) \lesssim R(T)$ که در این صورت خواهیم داشت:

$$(۳۶) \quad [dF/dt]_{t=T} \simeq (1 - 2\lambda)(a + 1)R(T) - bP(T)$$

$$(1 - 2\lambda)(a + 1) - b \leq 0$$

برای مقدار λ فرض کردیم $\lambda=1/40$ باشد، پس:

$$(۳۷) \quad a \leq \frac{b}{(1 - 2\lambda)} - 1$$



در اینجا شرایطی را در نظر گرفتیم که فاصله ثروت دو گروه از یکدیگر زیاد نباشد و به نوعی ثروت R, P فاصله کمی از هم داشته باشند. محاسبات بیان می‌کند که اگر فاصله طبقات ثروت به یکدیگر نزدیک باشد، زکات می‌تواند تحت شرایطی منجر به ایجاد توازن ثروت در جامعه شود. در ادامه شرایطی را بررسی می‌کنیم که فاصله طبقاتی زیاد باشد.

• حالت دوم: $P(T) \ll R(T)$ که در این صورت داریم:

$$(38) \quad [dF/dt]_{t=T} \simeq (1 - 2\lambda)(a + 1)R(T)$$

$$(1 - 2\lambda)(a + 1) \leq 0$$

$$(39) \quad \xrightarrow{\lambda=1/40} (a + 1) \leq 0 \Rightarrow a \leq -1$$

به این معنا که اگر فاصله ثروت دو طبقه از یکدیگر بسیار زیاد باشد، برای ایجاد توازن، باید میانگین رشد ثروت طبقه ثروتمند منفی باشد. به بیانی دیگر باید ثروتمندان هرساله رشد ثروتشان منفی باشد و این یعنی در جامعه‌ای که فاصله طبقاتی شدید باشد زکات به تنهایی نمی‌تواند منجر به رفع فقر شود.

۴-۲-۴- بررسی تابع G

همان‌طور که اشاره شد وضعیت مطلوب آن است که تابع G به سمت یک میل کند. یعنی صورت و مخرج کسر به یکدیگر نزدیک شوند تا حاصل کسر به سمت ۱ میل کند. از معادله شماره ۱۹ و فرض $(\sigma_2=0)$ برای دیفرانسیل تابع G طبق قاعده تقسیم به صورت زیر خواهد بود:

$$(40) \quad dG = \frac{dR(t)P(t) + dP(t)R(t)}{P(t)^2}$$

۴-۲-۴-۱- زکات و باز توزیع در جامعه با استفاده از تابع G

$$\text{می‌دانیم: } (dw_i(t))^2 = dt$$

$$\text{پس داریم: } w_i \simeq \sqrt{t} \rightarrow dw_i = dt/2\sqrt{t}$$

به علاوه همان‌طور گفتیم T دوره پرداخت زکات است که اگر به سمت بی‌نهایت میل کند، زکات بی‌اثر می‌شود و هرچقدر به سمت صفر میل کند اثر زکات بزرگ‌تر خواهد



شد. در حکم زکات این مقدار برابر ۱ سال در نظر گرفته است. در مورد σ هم می‌دانیم که اثری مانند T اما متضاد و مقابل دارد. بنابراین فرض می‌کنیم که:

$$\sigma \simeq 2\sqrt{T}$$

با جایگذاری در معادله شماره (۴۰) و فروض فوق خواهیم داشت:

(۴۱)

$$[dG/dt]_{t=T} \simeq \frac{[(1-\lambda)(a-b+1)R(t)]P(t) - [\lambda(a+1)R(t)]R(t)}{P(t)^2}$$

هدف ما این است که ببینیم با چه مقادیری معادله (۴۱) در نقطه بحرانی قرار می‌گیرد. برای بررسی این مهم باید تعیین کنیم تحت چه شرایطی رابطه زیر برقرار می‌شود:

$$[dG/dt]_{t=T} \leq 0$$

• حالت اول: $P(T) \lesssim R(T)$ که در این صورت خواهیم داشت:

$$(۴۲) \quad [dG/dt]_{t=T} = [(1-\lambda)(a+b+1)] - \lambda(a+1)$$

$$\frac{\lambda}{(1-\lambda)} \geq \frac{a-b+1}{a+1}$$

می‌دانیم که مقدار $\lambda=1/40$ است:

$$1/39 \geq \frac{a-b+1}{a+1}$$

• حالت دوم: $P(T) \ll R(T)$ که در این صورت داریم:

فرض می‌کنیم: $R(t) \approx MP(T)$ که M یک عدد خیلی بزرگ‌تر از یک است، با جایگذاری در رابطه ۴۱ و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$[dG/dt]_{t=T} = (1-\lambda)(a+1) - b - \lambda(a+1)M$$

(۴۳)

$$a \leq \frac{(1-M)\lambda + b - 1}{(1-\lambda - \lambda M)}$$

مقدار مخرج کسر همواره منفی است و همچنین انتظار داریم که مقدار صورت عددی مثبت باشد، پس علامت کسر منفی است، بنابراین:

$$a \leq 0$$



همان نتیجه که با استفاده از تابع F حاصل شد در تابع G نیز به دست می‌آید. بنابراین اگر اختلاف ثروت بین زکات‌دهنده و زکات‌گیرنده کم باشد، تحت شرایطی در نهایت زکات این پتانسیل را دارد که توازن ثروت بین طبقات جامعه برقرار کند، اما اگر اختلاف ثروت دو گروه خیلی زیاد باشد تحت فروض مدل، بدون تغییر در رشد ثروت و یا ساختار درآمدی دو گروه، زکات در ایجاد توازن خیلی اثرگذار نیست.

۴-۲-۵- اثر زکات بر ثروت جامعه

فرض می‌کنیم که همه‌ی ثروت جامعه بین این دو گروه تقسیم‌شده است و تابع ثروت جامعه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N(R, P, t) = N(R, P) = R(t) + P(t)$$

ابتدا با توجه به فرمول ایتو و معادله‌های شماره (۱۵)، (۲۱) و (۲۲) داریم:

$$(۴۴) \quad \partial N / \partial R = \partial N / \partial P = 1$$

$$\partial N / \partial t = \partial^2 N / \partial^2 R = \partial^2 N / \partial^2 P = \partial^2 N / \partial R \partial P = 0$$

می‌دانیم: $(dw_i(t))^2 = dt$

پس داریم: $w_i \approx \sqrt{t} \rightarrow dw_i = dt / 2\sqrt{t}$

با استفاده از معادله (۳۴) برای مقدار dN که تابع رشد ثروت ملی است داریم:

(۴۵)

$$\begin{aligned} dN &= dR + dP \\ &= a(1 - \lambda)[aR(t)dt + \sigma R(t)dw(t)] + bP(t)dt + (\lambda)[aR(t)dt \\ &\quad + \sigma R(t)dw(t)] = aR(t)dt + R(t)dt + bP(t)dt \end{aligned}$$

$$(۴۶) \quad [dN/dt]_{t=T} = (a + 1)R(t) + bP(t)$$

بنابراین، رشد ثروت جامعه تحت فروض این مدل مستقل از زکات است و در این مدل پرداخت زکات اثری روی ثروت جامعه ندارد. به علاوه اینکه اثر تغییرات ثروت ثروتمندان نقش مهم‌تری در ثروت کل جامعه دارد. البته در برخی مطالعات مانند (اصغری، ۱۳۹۶) به این مسئله اشاره شده است که زکات منجر به افزایش تولید ثروت نیز خواهد شد. باید به این نکته توجه داشت که نتیجه حاصل از مدل بر اساس فروض



و ساده‌سازی‌های مطرح‌شده به‌دست‌آمده است و با کامل‌تر شدن مدل امکان تبیین این مهم نیز فراهم می‌گردد.

۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۵-۱- بحث

زکات از ضروریات دین اسلام و مورد اتفاق همه مسلمانان است و بر اساس آن، مسلمانان باید مقدار معینی از برخی کالاها را برای مصرف در زندگی فقرا و سایر امور اجتماعی بپردازند. در مورد منابع زکات و اموال مشمول زکات نظرات مختلفی مطرح‌شده است. در بین فقه‌های شیعه مشهور است که زکات، در همان موارد نه‌گانه واجب است و در غیر آن نه مورد، زکاتی واجب نیست و بر آن ادعای اجماع و اتفاق نیز شده است. (محقق حلی، ۱۴۰۲ ق، ص ۲۵۸) به‌علاوه اینکه پول‌های رایج امروزی را داخل در منابع زکات نمی‌دانند. نظر دوم آن است که پول‌های رایج امروزی را نیز در نظر گرفته و حکم زکات در نقدین را قابل تسری می‌داند. نظر دیگر با تمسک به گروهی از روایات قائل به گسترش و تعمیم منابع زکات است.

با توجه به اهمیت موضوع زکات؛ این مسئله در مطالعات اقتصاد اسلامی نیز مورد توجه قرار گرفته است. به‌طور کلی می‌توان مطالعات انجام‌شده را در سه دسته تقسیم کرد؛ دسته اول مطالعاتی که به بررسی روایی و یا فقهی اموال مشمول زکات پرداخته و امکان گسترش آن را بررسی کرده است. دسته دوم به بررسی و تحلیل‌های آماری زکات و اثرات آن بر فقر و اقتصاد ایران پرداخته است و دسته سوم که بیشتر بر نهادسازی و مسائل عملیاتی زکات متمرکز شده است.

با این وجود علی‌رغم اینکه مطالعات خوب و قابل توجهی در این حوزه انجام‌شده است اما هم‌چنان خلأ یک تبیین ریاضی از این مسئله احساس می‌شود. روش‌های ریاضی یک ابزار محکم و قابل فهمی برای مباحث اقتصاد اسلامی مهیا می‌کند. استفاده از روش ریاضی برای تجزیه و تحلیل مسائل اقتصادی، امکانی روش‌شناختی است که به‌طور ویژه در قرن نوزدهم مورد توجه قرار گرفت. دامنه بحث و نظرها درباره رابطه ریاضیات و علم اقتصاد و نقد و بررسی دقیق و موشکافانه این تعامل از جمله موضوعاتی است که تا به امروز نیز ادامه داشته و همواره محل نزاع روش‌شناختی مکاتب مختلف اقتصادی بوده است. (پورکاظمی، ۱۳۹۴، ص ۴)

این مقاله مسئله زکات و اثرات آن در فاصله طبقاتی و رشد اقتصادی را با یک روش کمی و استفاده از ریاضیات تصادفی مورد بررسی قرار داد. به همین منظور با اتخاذ نظریه



امکان گسترش منابع زکات ابتدا افراد جامعه را به دودسته زکات‌دهنده و زکات‌گیرنده تقسیم‌شده و معادلات تصادفی ثروت هر گروه محاسبه می‌شود. و پس از آن با تشکیل توابع مرتبط نقش زکات در فاصله‌ی طبقاتی و درآمد جامعه بررسی شده است.

۵-۲- نتیجه‌گیری

طبق نتایج مدل مشخص شد که اگر در جامعه زکاتی پرداخته نشود و باز توزیعی در جامعه صورت نگیرد، برای ایجاد توازن بین طبقات باید مجموع رشد ثروت دو گروه به سمت صفر میل کند و میانگین رشد ثروت ثروتمندان در دوره‌های متوالی منفی و میانگین رشد ثروت فقرا مثبت باشد. اما در صورت پرداخت زکات؛ اگر اختلاف ثروت بین زکات‌دهنده و زکات‌گیرنده کم باشد، تحت شرایطی در نهایت زکات این پتانسیل را دارد که توازن ثروت بین طبقات جامعه را برقرار کند، اما اگر اختلاف ثروت دو گروه خیلی زیاد باشد تحت فروض مدل، بدون تغییر در رشد ثروت و یا ساختار درآمدی دو گروه، زکات در ایجاد توازن خیلی اثرگذار نخواهد بود. همچنین مشخص شد که ثروت جامعه تحت فروض مدل مستقل از زکات است و مطابق مدل زکات اثری بر تغییرات ثروت جامعه ندارد.

۵-۳- پیشنهادها

با توجه به مباحث مطرح‌شده و نتایج مدل توصیه می‌گردد در استفاده و فهم این مسئله که پرداخت زکات در جهت رفع فقر است دقت بیشتری انجام شود و به این نکته توجه شود که هرچقدر به سمت اجرای نظام اقتصاد اسلامی در جامعه پیش برویم سیاست‌های اقتصادی اسلام نتایج و کارایی بهتر و دقیق‌تری خواهند داشت. نکته بعدی اینکه مشخص گردید در صورتی که فاصله طبقات از یکدیگر زیاد باشد حتی با اجرای نظریه تعمیم در بحث زکات همچنان امکان اجرای توازن اجتماعی نخواهد بود فلذا محققین اقتصاد اسلامی باید به این نکته توجه داشته باشند که صرف تأکید بر تعمیم زکات مشکل را حل نخواهد کرد و باید معطوف به هدف اصلی که همان اجرای کامل نظام اقتصادی اسلام است، تلاش‌های بیشتر و مستمری انجام شود.



۶- منابع

۶-۱- منابع فارسی

الف) مقاله‌ها

۱. اصغری، محمود (۱۳۹۶)، نقش زکات در تولید ثروت در نگرش قرآن کریم، پژوهش‌های اجتماعی اسلامی، بهار ۱۳۹۶، شماره ۱۱۲، صص ۸۵-۵۶.
۲. ایروانی، جواد (۱۳۸۸). بازکاوی مفهوم و کاربرد واژه‌های زکات و صدقه در روایات، علوم حدیث، سال سیزدهم، شماره ۲، صص ۴۷-۲۶.
۳. توسلی، محمداسماعیل (۱۳۹۴). امکان‌سنجی فقهی احیای زکات پول‌های نقد رایج کنونی. پژوهشنامه مالیات، شماره ۷، صص ۴۸-۲۷.
۴. پورکاظمی، محمدحسین، و همکاران (۱۳۹۴)، کاربرد ریاضیات در اقتصاد اسلامی؛ مزایا و محدودیت‌ها، مطالعات اقتصاد اسلامی، سال هشتم پاییز و زمستان ۱۳۹۴ شماره ۱ (پیاپی ۱۵)، صص ۹۸-۷۳.
۵. شعبانی، احمد و کاشیان، عبدالمحمد (۱۳۹۲)، زکات پول از منظر فقه فریقین و بررسی ظرفیت بالقوه آن در فقرزدایی (مطالعه سال‌های ۱۳۸۷ تا ۱۳۸۹ اقتصاد ایران)، دو فصلنامه مطالعات اقتصاد اسلامی، سال ششم، شماره ۱ (پیاپی ۱۱)، پاییز و زمستان ۱۳۹۲، صص ۶۵-۳۴.
۶. شعبانی، احمد و عبدالمحمد، کاشیان (۱۳۹۲). زکات پول از منظر فقه فریقین و بررسی ظرفیت بالقوه آن در فقرزدایی (مطالعه سال‌های ۱۳۸۷ تا ۱۳۸۹ اقتصاد ایران)، دو فصلنامه مطالعات اقتصاد اسلامی، سال ششم، شماره ۱ (پیاپی ۱۱)، پاییز و زمستان ۱۳۹۲، صص ۴۸-۲۵.
۷. شعبانی، احمد و کاشیان، عبدالمحمد (۱۳۹۴)، طراحی سازوکار ورود خمس به اقتصاد ایران و آثار بالقوه اقتصادی آن، دو فصلنامه علمی-پژوهشی مطالعات اقتصاد اسلامی، سال هشتم، شماره دوم، بهار و تابستان ۱۳۹۵، صص ۷۴-۳۹.
۸. عاقلی، لطفعلی (۱۳۹۱). سنجش ظرفیت پرداخت مالیات‌های اسلامی در استان‌های کشور، پژوهشنامه مالیات، پیاپی ۶۴، صص ۹۱-۶۱.
۹. عسکری، محمدمهدی و عبدالمحمد، کاشیان (۱۳۸۹). آزمون بسندگی زکات و خمس در تأمین حداقل معیشت خانوارهای نیازمند در اقتصاد ایران طی سال‌های ۱۳۸۰ تا ۱۳۸۷، معرفت اقتصادی، سال دوم، شماره اول، صص ۳۶-۵.
۱۰. کیاء الحسینی، سید ضیاء (۱۳۸۲)، برآورد زکات در ایران و جایگاه آن در رفع نیازهای ضروری، نامه مفید، قم، صص ۱۱۷-۹۵.
۱۱. کیاء الحسینی، سید ضیاء الدین (۱۳۸۷). نقش زکات فطره در فقرزدایی مطالعه موردی ایران ۱۳۸۰-۱۳۷۰، اتحاد اسلامی، شماره ۳۱، صص ۴۵-۳۲.



۱۲. کبیاة الحسینی، سید ضیاء الدین (۱۳۸۰)، بر آورد خمس ارباح مکاسب به عنوان یکی از منابع مالی اسلامی تأمین اجتماعی، فصل نامه تأمین اجتماعی، ش ۹، ص ۲۵۸-۲۱۳.
۱۳. اسماعیل پوردره، مهدی، الگوی مناسب مؤسسات مالی زکات در حضوری اسلامی ایران، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده معارف سلامی و اقتصاد، دانشگاه امام صادق (ع)، ۱۳۸۷.

ب) کتابها

۱. قرآن کریم
۲. حرّعاملی، محمد بن حسن (۱۴۰۹ ق.)، وسایل الشیعه، قم: موسسه آل البيت (ع).
۳. عسکری، محمد مهدی (۱۳۸۵). تحلیل نظری زکات. تهران، دانشگاه امام صادق (ع).
۴. طباطبایی، سید محمد حسین (۱۳۷۴). المیزان فی تفسیر القرآن. ترجمه: سید محمد باقر موسوی همدانی. پنجم. قم: دفتر انتشارات اسلامی جامعه‌ی مدرسین حوزه علمیه قم.
۵. ابن بابویه، محمد بن علی (شیخ صدوق) (۱۴۱۳ ق.)، من لایحضره الفقیه، قم دفتر انتشارات اسلامی وابسته به جامعه مدرسین حوزه علمیه قم.

۶-۲- منابع لاتین

Articles

1. Kahf, Monzer (1998), **Zakah and Obligatory Expenditures in Islam - in: Lessons In Islamic Economics**, Islamic Research and Training Istitution (IRTI), Islamic Development Bank (IDB), Jeddah: 1418 H/1998 G
2. Hassan, Kabir, (2010). **An integrated poverty alleviation model combining Zakat, Awqaf and microfinance**, Seventh International Conference – The Tawhidi Epistemology: Zakat and Waqf Economy, Bangi
3. Iqbal, Munawar (1985), **Zakah, Moderation, and Aggregate Consumption in an Islamic Economy**, Journal of Research in Islamic Economics, Jeddah, Vol. 3, No. 1, Summer, pp.45-61.
4. Belgacem, F.B.M. (2001) **Diffusion and Drift Models for Population Dispersal from Stochastics and Continuum Views**. Int. Journal of Applied Mathematics (IJAM), pp 85-106
5. Belgacem, FB.M. (2010), **Modeling the stochastic dynamics of Zakaat: MATHEMATICS IN ENGINEERING, SCIENCE AND AEROSPACE**, Vol. 1, No. 1, pp. 91-103.
6. Suprayitno, E., Abdul Kader, R., & Harun, A. (2013). **The Impact of Zakat on Aggregate Consumption in Malaysia**, Journal of Islamic Economics, Banking and Finance, Vol. 9, No. 1, pp.39-62.



7. Rafiq, Md. Rafiqul Islam(2016). **General Mosque Based Zakat Model To The Alleviation Of Poverty- Evidence From Bangladesh.** Journal of Business and Management, Volume 18, Issue 4.Ver. IV (Apr. 2016), PP 01-09
8. Kahf, Monzer (1998). **Zakah and Obligatiry Expenditures in Islam - in: Lessons In Islamic Economics,** Islamic Research and Training Iostitution (IRTI), Islamic Development Bank (IDB), Jeddah: 1418 H/1998 G.
9. Iqbal, Munawar (1985), **Zakah, Moderation, and Aggregate Consumption in an Islamic Economy.** Journal of Research in Islamic Economics, Jeddah, Vol. 3, No. 1, Summer, pp.45-61.
10. Hassan, Kabir(2010). **An integrated poverty alleviation model combining Zakat, Awqaf and microfinance,** Seventh International Conference – The Tawhidi Epistemology: Zakat and Waqf Economy, Bangi 2010, pp. 187-194

Books

11. Gardiner C.W, **Handbook of Stochastic Methods, for Physics, Chemistry and the Natural Sciences.** 2nd edition, 4th printing, Springer, Berlin, 1997.
12. Mckean, H.P, **Stochastic Integrals.** Academic Press, New York, 1969.
13. Ovidiu Calin, **An Informal Introduction To Stochastic Calculus With Applications,** Wspc, 2012.

